AYT
ORİJİNAL TÜREV
FASİKÜLÜ

ISBN

978-605-06571-6-6

Genel Yayın Koordinatörü

Zafer BALCI

Yazarlar

Abdurrahim ŞAHİN
Hasan BOSTANLIK
Barış ALTAY
Zafer BALCI

Editörler

Murat ÇEVİK
Fatih DAYI

Redaksiyon

Buse UĞANTAŞ

Dizgi ve Tasarım

Sefa Tuğrul ATASOY
Mert Oğuz COŞKUN
Şeyma Nur ÇETİN
statasoy@gmail.com
+90 505 563 53 48

BASKI VE CİLT

Özyurt Matbaacılık
ANKARA

ORİJİNAL MATEMATİK YAYINLARI

İLETİŞİM

Ostim Mahallesi 1207. Sokak 3/C-D Ostim/Yenimahalle/ANKARA

Tel: (0312) 395 13 96   Fax: (0312) 394 10 04

ÖN SÖZ

Sevgili Öğrenciler ve Değerli Meslektaşlarımız,

Orijinal Matematik Yayınları olarak idealleri olan her öğrencimize yol göstermek ve onların başarılarını artırmak için "Türev Konu Anlatımlı Eğitim Seti" adını verdiğimiz fasikülümüzü hazırladık.

Fasikülümüzde detaylı konu anlatımları, çözümlü örnekler, "Bir de Orijinalden Dinle!" adlı açık uçlu sorular ve kazanım testleri bulunmaktadır. Bölüm sonunda bir Orijinal Yayınları klasiği olan "ÖSYM Tarzı Testler" yer almaktadır.

Konu anlatımlarımız ve "Bir de Orijinalden Dinle!" açık uçlu sorularımız, Orijinal Matematik Youtube kanalında özel ders formatında izleyebilmeniz için hazırlanmıştır. Kazanım Testleri ve ÖSYM Tarzı Testlerimizin çözümlerini Orijinal Matematik video çözüm uygulamasından dinleyebilirsiniz. Çalışmamızın tamamı video çözümlüdür.

Tuğba BOSTANLIK, Mehtap ALTAY, Şimal ALTAY,
Özge BALCI, Mehmet Şükrü KARAKAYA,
Nurullah KILIÇ, Fatih ÖZKAN,
Recep Hakan DÖNMEZ, Mehmet ÖZTÜRK,
Mevlüt GÜVEN, Mehmet GÜLTEKİN, Fuat SES,
Yusuf SEZGİN, Mikail KARACA, Hüseyin BOZKURT,
Abdülselam AYDIN ve Kerem BULUT'a
bu çalışmamızda bize verdikleri desteklerden dolayı
teşekkür ederiz:

Her yer orijinal olacak.

ORİJİNAL AİLESİ

1. BÖLÜM

2. BÖLÜM

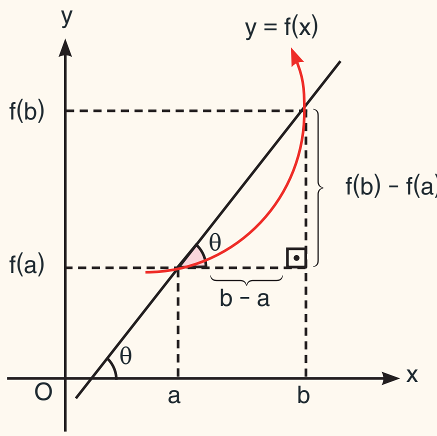
3. BÖLÜM

4. BÖLÜM

Sevgili öğrenciler,

bu konunun kavranması için 11. sınıfta görülen "fonksiyon değişim oranı" konusu hatırlanmalıdır.

f: [a, b] → R fonksiyonu verilsin.



f fonksiyonun x = a ve x = b arasındaki ortalama değişim oranı:

$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \tan\theta$ olarak bulunur.

Şimdi bir örnek ile pekiştirelim.

ÖRNEK - 1

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $f(x) = x^2 + 6$ **fonksiyonunun** $x \in [2, 4]$ **aralığındaki ortalama değişim oranını bulunuz.**

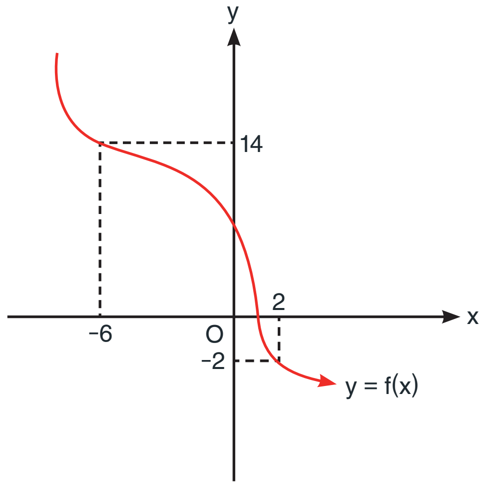
ÇÖZÜM

$\dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \dfrac{(16 + 6) - (4 + 6)}{4 - 2} = \dfrac{12}{2} = 6$ bulunur.

Cevap: 6

ÖRNEK - 2

Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



f fonksiyonunun $x \in [-6, 2]$ aralığındaki ortalama değişim oranı kaçtır?

ÇÖZÜM

$\dfrac{f(2) - f(-6)}{2 - (-6)} = \dfrac{-2 - 14}{2 + 6} = -\dfrac{16}{8} = -2$

Cevap: -2

Artık ortalama hızı çok rahat anlayabiliriz.

Otomobille bir yere giderken hep aynı hızla gitmezsiniz, bazen hızlı bazen yavaş gidersiniz.

Hız göstergesine bir anlık baktığınızda okuduğunuz değer **anlık hızı**, başladığımız yerden vardığınız yere kadar aldığınız yolun geçen süreye oranı **ortalama hızı** verecektir.

Trafikte yeşil dalga sistemi, belli bir ortalama hızla ilerleyen araçların trafik ışıklarında hep yeşil ışığı yakalamaları, kırmızı ışığa takılmamaları için düzenlenmiştir.

Ortalama hızı daha az ya da daha fazla olan araçlar ise kırmızı ışıklara takılır. Çünkü art arda gelen trafik ışıklarının zamanlanması belirlenen ortalama hıza göre hesaplanır.

ÖRNEK - 3

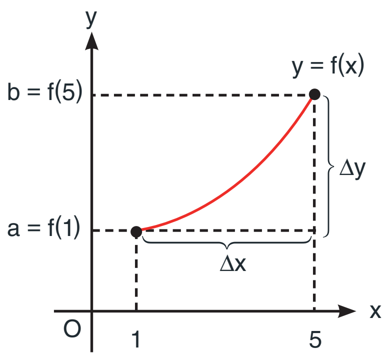
f: [1, 5] ⟶ [a, b] aralığında tanımlı

$f(x) = x^2 + 4x + 7$

fonksiyonunun $x \in [1, 5]$ **aralığındaki ortalama değişim oranı kaçtır?**

ÇÖZÜM

Grafik ile gösterelim.



$f(5) = 5^2 + 4 \cdot 5 + 7 = 52$

$f(1) = 1^2 + 4 \cdot 1 + 7 = 12$

Değişim oranı $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \dfrac{52 - 12}{5 - 1} = 10$

Cevap: 10

ÖRNEK - 4

Doğrusal hareket eden bir aracın konum – zaman denklemi

$s(t) = t^2 + 5t + 7$

olduğuna göre, 1. ve 5. saatler arasındaki değişim oranı kaçtır? (konum: km, zaman: saat)

ÇÖZÜM

Değişim oranı: Ortalama hız: $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

$\Delta s = s(5) - s(1) = (25 + 25 + 7) - (1 + 5 + 7) = 44$ km

$\Delta t = 5 - 1 = 4$ saat

O hâlde

$V_{ort} = \dfrac{\Delta s}{\Delta x} = \dfrac{44}{4} = 11$ km/s bulunur.

Cevap: 11

ÖRNEK - 5

Aşağıdaki tabloda Karaman iline ait kasım ayının ilk haftasının sıcaklık değerleri verilmiştir.

Gün	1	2	3	4	5	6	7
Sıcaklık	20°C	16°C	14°C	6°C	8°C	14°C	12°C

Buna göre, 1. ve 5. günler arasında hava sıcaklığındaki değişim oranı (hızı) kaç °C 'dir?

ÇÖZÜM

T: °C t: gün olsun.

$\dfrac{\Delta T}{\Delta t} = \dfrac{T(5) - T(1)}{5 - 1} = \dfrac{8 - 20}{4} = \dfrac{-12}{4} = -3$°C

Cevap: −3

ÖRNEK - 6

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $f(x) = x^3$ **fonksiyonunun** $x \in [1, k]$ **aralığındaki ortalama değişim oranı 7 ise k değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun [1, k] aralığındaki ortalama değişim oranı $\dfrac{f(k) - f(1)}{k - 1}$ formülü ile hesaplanır.

$\dfrac{f(k) - f(1)}{k - 1} = \dfrac{k^3 - 1}{k - 1} = 7$

$\Rightarrow \dfrac{(k - 1) \cdot (k^2 + k + 1)}{k - 1} = 7 \qquad k^2 + k - 6 = 0$

$(k + 3) \cdot (k - 2) = 0$ denkleminden k=−3 ve k=2 bulunur.

$k > 1$ olduğundan $k = 2$ olacaktır.

Cevap: 2

ORİJİNAL MATEMATİK

ANLIK DEĞİŞİM HIZI

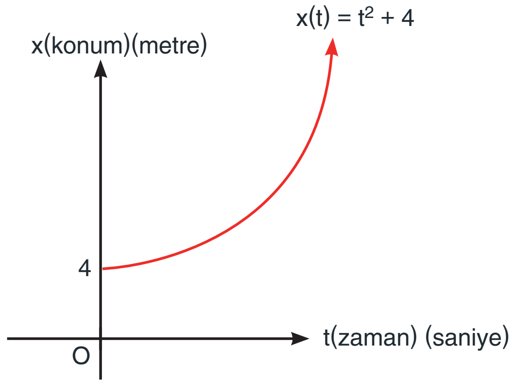
Ortalama hızın formülünü $(V_{ort}) = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$ olarak görmüştük.

Hareketlinin t_1 anındaki anlık hızını bulmak için t_2 değeri t_1'e yaklaşırken fonksiyonun değişim oranı hesaplanmalıdır. Bu oran

$\lim\limits_{t_2 \to t_1} \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$ limiti ile hesaplanır.

ÖRNEK - 7

Doğrusal hareket eden bir hareketliye ait konum zaman grafiği aşağıda verilmiştir.



Buna göre, bu hareketlinin 2. saniyedeki anlık hızı kaç m/sn'dir?

ÇÖZÜM

$$\lim_{t \to 2} \frac{x(t) - x(2)}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{(t^2 + 4) - (2^2 + 4)}{t - 2}$$

$$\lim_{t \to 2} \frac{t^2 - 4}{t - 2} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ belirsizliği}\right)$$

$$= \lim_{t \to 2} \frac{(\cancel{t - 2}) \cdot (t + 2)}{\cancel{t - 2}}$$

$$= \lim_{t \to 2} (t + 2) = 4 \text{ m/sn}$$

Cevap: 4

ORTALAMA HIZ ve ANLIK HIZ ARASINDAKİ FARK NEDİR?

- Ortalama hızla anlık hız arasındaki fark, hareket sırasında geçen zaman aralığının **büyüklüğüdür**.
Ortalama hızda zaman aralığı nispeten büyüktür, aradaki hız değişimleri önemsenmez, toplam yer değiştirme toplam zaman aralığına bölünür.

Ortalama hız matematiksel olarak.

$$\vec{V}_{ortalama} = \frac{\vec{\Delta y}}{\Delta x}$$

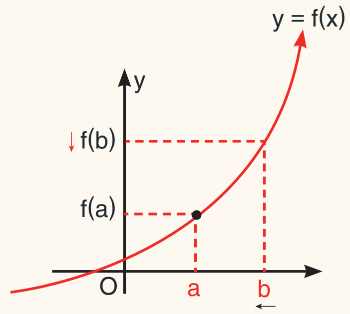
şeklinde gösterilir.

- Anlık hızda ise zaman aralığı çok küçüktür. Zaman aralığı o kadar küçüktür ki neredeyse sıfırdır ama tam olarak sıfır değildir.

$$\vec{V}_{ortalama} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta y}}{\vec{\Delta x}}$$

Şimdi grafik üzerinde inceleyelim.

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonun grafiği aşağıda verilmiştir.



[a, b] aralığındaki ortalama değişim hızının $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ olduğunu biliyoruz.

b noktasını, a noktasına olabildiğince yaklaştırıldığında f fonksiyonunun a noktasındaki anlık değişim oranını bulunur.

Anlık değişim oranını $\lim\limits_{b \to a} \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ limitinin değeri olarak tanımlayabiliriz.

Şimdi bu limiti başka türlü ifade edelim:

$b - a = h$ olsun. b olabildiğince a'ya yaklaştırıldığında $b - a$ değeri 0'a yaklaşacaktır. Yukarıda tanımladığımız anlık değişim oranında $b = a + h$ yazalım.

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad \text{olacaktır.}$$

O hâlde f fonksiyonunun a noktasındaki anlık değişim oranı:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

limitinin değerine eşittir.

ÖRNEK - 8

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$f(x) = x^2 + 5x$

a. **$x \in [1, 4]$ aralığındaki ortalama değişim oranı kaçtır?**

b. **$x = 2$ noktasındaki anlık değişim oranı kaçtır?**

ÇÖZÜM

a. [1, 4] aralığındaki ortalama değişim oranı: $\dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$

$\dfrac{16 + 20 - 1 - 5}{3} = \dfrac{30}{3} = 10$ bulunur.

Cevap: 10

b. $x = 2$ noktasındaki anlık değişim hızı: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(h+2)^2 + 5(h+2) - 14}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 4h + 4 + 5h + 10 - 14}{h}$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{h} \cdot (h + 9)}{\cancel{h}} = 9$

Cevap: 9

ÖRNEK - 9

Düzgün doğrusal hareket eden bir aracın zamana bağlı yol denklemi,

$s(t) = t^2 + 2t$ (t: saat, s: kilometre)

olarak veriliyor.

a. **Aracın $t \in [1, 2]$ aralığındaki ortalama hızı kaç km'dir?**

b. **$t = 2$ anında aracın hızı kaç kilometredir?**

ÇÖZÜM

a. [a, b] aralığındaki ortalama hız: $\dfrac{s(b) - s(a)}{b - a}$

$\dfrac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \dfrac{4 + 4 - 3}{1} = 5$ km/s 'dir.

Cevap: 5

b. $t = x_0$ anındaki hız: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{s(x_0 + h) - s(x_0)}{h}$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{s(2+h) - s(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(h+2)^2 + 2(h+2) - (4+4)}{h}$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 4h + 4 + 2h + 4 - 8}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{h}(h + 6)}{\cancel{h}} = 6$ km/s 'dir.

Cevap: 6

ÖRNEK - 10

Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu verilmiştir.

$f(x) = x^3 + x$

f fonksiyonunun [0, 1] aralığındaki ortalama değişim oranı a, $x = 2$ noktasındaki anlık değişim oranı b olduğuna göre $a + b$ toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

[0, 1] aralığındaki ortalama değişim oranı: $a = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$

$a = \dfrac{1 + 1}{1} = 2$ olarak bulunur.

$x=2$ noktasındaki anlık değişim hızı: $b = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$b = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(h + 2)^3 + (h + 2) - (8 + 2)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^3 + 6h^2 + 12h + 8 + h + 2 - 8}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(h^2 + 6h + 13)}{h} = 13$

$a = 2$ ve $b = 13$ $a + b = 15$ bulunur.

Cevap: 15

ÖRNEK - 11

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $f(x) = x^3$ fonksiyonunun $x = k$ noktasındaki anlık değişim oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun $x = k$ noktasındaki anlık değişim oranı

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(k + h) - f(k)}{h}$ limiti ile hesaplanır.

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(k + h)^3 - k^3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{k^3 + 3k^2h + 3kh^2 + h^3 - k^3}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(3k^2 + 3kh + h^2)}{h}$

$= 3k^2$ bulunur.

Cevap: $3k^2$

ORİJİNAL MATEMATİK

ÖRNEK - 12

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$f(x) = -x^2 + k \cdot x$

f fonksiyonunun x=2 noktasındaki anlık değişim oranı pozitif olduğuna göre k'nin en geniş değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

x = 2 noktasındaki anlık değişim oranı

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{b - a} > 0$ olmalıdır.

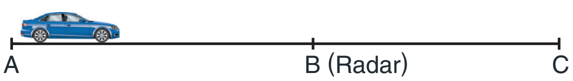
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-(h+2)^2 + k \cdot (h+2) - (-4 + 2k)}{h} > 0$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h^2 - 4h - 4 + k \cdot h + 2k + 4 - 2k}{h} > 0$

$k - 4 > 0$ $\quad k > 4$ olmalıdır.

Cevap: $(4, \infty)$

ÖRNEK - 13



A şehrinden C şehrine doğrusal hareket ederek ulaşan bir aracın t saatte aldığı yol

$s(t) = 4t^2 + 60t$ (km)

fonksiyonu ile modellenmiştir.

AC yolu boyunca hız sınırının 80 km/s olduğu bilinmektedir.

Aracın B'de bulunan radar noktasından geçip ceza yemediğine göre, araç AB yolunu kaç dakikada almış olabilir?

(Hız ölçümü B noktasından geçtiği anda hesaplanmaktadır.)

ÇÖZÜM

Araç B noktasından geçerken anlık hızı 80 km/s veya daha düşük bir hızla geçmelidir.

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h} \le 80$ olmalıdır.

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4 \cdot ((h+t)^2 + 15 \cdot (t+h)) - 4 \cdot (t^2 + 15t)}{h} \le 80$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{t^2} + 2th + h^2 + \cancel{15t} + 15h - \cancel{t^2} - \cancel{15t}}{h} \le 20$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h \cdot (2t + h + 15)}{h} \le 20 \Rightarrow 2t \le 5 \quad t \le \dfrac{5}{2}$

Araç B noktasından 150 dk veya daha erken bir sürede geçmelidir.

Cevap: $t \le 150$

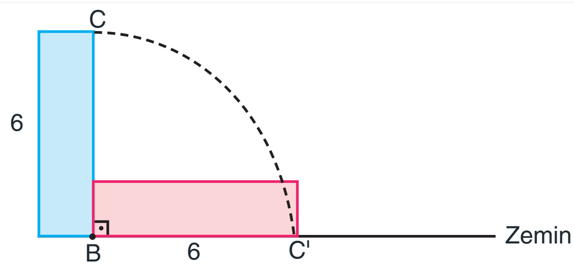
ÖRNEK - 14

Dikdörtgen biçimindeki cisim B köşesinden zemine sabitlenmiştir.

Cisim zemine dik konumda iken ok yönünde devrilme hareketinden 3 saniye sonra C noktası zemine değmiştir.

|AD| = 6 metre olduğuna göre, C noktasının zemine değdiği ana kadar geçen süredeki ortalama değişim hızı kaç metre/saniye'dir?

ÇÖZÜM



Öncelikle C noktasının zemine değinceye kadar ne kadar yol aldığını bulalım. Yukarıdaki şekilden anlaşılacağı üzere C noktası yere değinceye kadar bir çember yayı boyunca hareket edecektir.

Çember yayının uzunluğunu hesaplayalım: $\dfrac{2\pi \cdot 6}{4} = 3\pi$

Alınan yol 3π, toplam geçen süre 3 saniye olduğundan ortalama hız $\dfrac{3\pi}{3} = \pi$ m/s olarak bulunur.

Cevap: π

SORU - 1

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun [1, 3] aralığındaki ortalama değişim hızı a, x = 1 noktasındaki anlık değişim hızı b olduğuna göre, a – b değeri kaçtır?

SORU - 2

Düzgün doğrusal hareket eden bir aracın zamana bağlı yol denklemi;

$s(t) = t^2 + k \cdot t$ (t: saat, s: kilometre)

şeklinde modellenmiştir.

Aracın t = 2 anındaki hızı 12 km/s olduğuna göre, k değeri kaçtır?

SORU - 3

Düzgün doğrusal hareket eden bir aracın V km/s hızla giderken frene basma anından itibaren duruncaya kadar aldığı mesafe

$D(V) = \left(\frac{V}{10}\right)^2$ (metre)

olarak modellenmiştir.

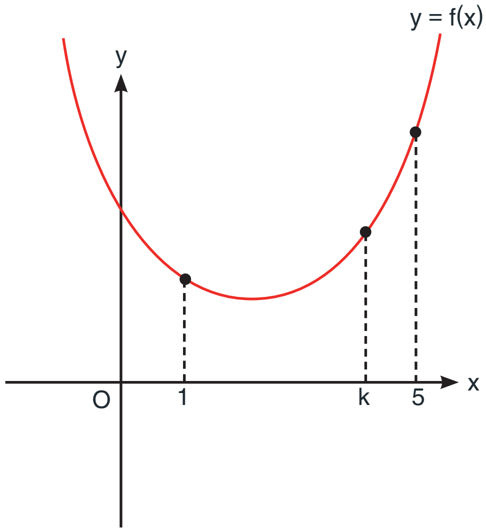
Aracın yol-zaman denklemi $S(t) = t^2 + 10t$ (km) dir.

Aracın hareketinden t saniye sonra frene basılmış ve durma mesafesi 16 metre olarak ölçülmüştür.

Buna göre, t değeri kaçtır?

SORU - 4

Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $f(x) = x^2 - 4x + 5$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



f fonksiyonunun [1, 5] aralığındaki ortalama değişim hızı, x = k noktasındaki anlık değişim hızına eşit olduğuna göre, k değeri kaçtır?

SORU - 5

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonlarının [a, b] aralığındaki ortalama değişim hızları eşit olduğuna göre,

I. $f(a) + f(b) = g(a) + g(b)$

II. $\frac{f(a)}{g(a)} > \frac{f(b)}{g(b)}$

III. $f(b) + g(a) = f(a) + g(b)$

ifadelerinden hangileri kesinlikle doğrudur?

Cevap Anahtarı

1. 2	2. 8	3. 15	4. 3	5. Yalnız III

1. Düzgün doğrusal hareket eden bir hareketlinin t saniyede aldığı yol;

$$x(t) = 4t^2 + t \text{ (metre)}$$

fonksiyonu ile modellenmektedir.

Hareketlinin [1, 3] **aralığındaki ortalama hızı saniyede m metre ve** t = 1 **anındaki hızı saniyede n metre olduğuna göre, $\frac{m}{n}$ oranı kaçtır?**

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{12}{5}$ D) $\frac{13}{7}$ E) $\frac{17}{9}$

2. Bir musluk boş bir havuzu doldurması için açılıyor.

Musluk, havuza t saatte

$$L(t) = 5t^2 + 2t \text{ } (m^3)$$

su doldurmuştur.

Buna göre,L fonksiyonunun t = 2 anındaki değişim hızı kaç m^3/sa olur?

A) 20 B) 22 C) 25 D) 28 E) 39

3. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ limiti bir gerçek sayıya eşit ise bu sayıya f fonksiyonunun x = a 'daki anlık değişim oranı denir.

Buna göre, $f(x) = \sqrt{x} + 3$ **fonksiyonunun** x = 9 **'daki anlık değişim oranı kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

4. Gerçel sayılarda tanımlı f fonksiyonu,

$$f(x) = x^2 + 5$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, [x, x + k] aralığındaki ortalama değişim oranı aşağıdakilerden hangisine eşittir? ($k \neq 0$)

A) 2x B) 2x + k C) $2xk + k^2$ D) k E) k^2

5. Düzgün doğrusal hareket eden bir hareketlinin t saatte aldığı yol;

$$x(t) = 30t + t^2 \text{ (km)}$$

biçiminde veriliyor.

Buna göre, bu hareketlinin [3, 5] **aralığındaki ortalama hızı kaç km/sa olur?**

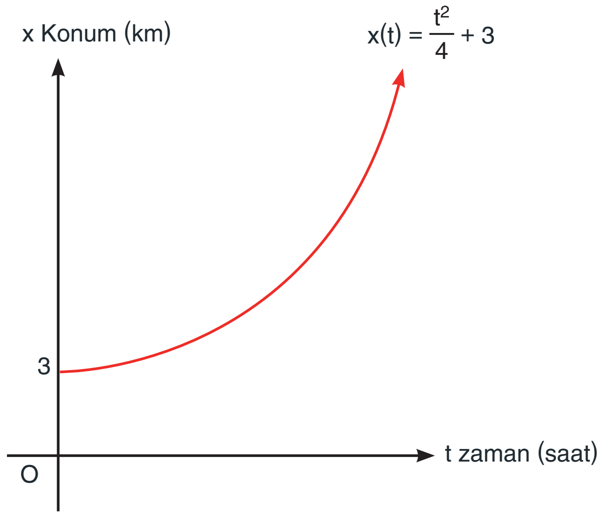
A) 30 B) 34 C) 38 D) 40 E) 42

6. Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonunun [k, k + 3] ve [k + 3, k + 6] aralığındaki değişim oranı sırasıyla 12 ve 20'dir.

Buna göre, f fonksiyonunun [k, k + 6] aralığındaki değişim oranı kaçtır?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 18 E) 32

7.



Yukarıdaki grafik bir aracın zamana bağlı olarak aldığı yolu göstermektedir.

Bu grafiğe göre, aracın [2, 4] saat aralığındaki ortalama hızı kaç km/sa olur?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

8. Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu

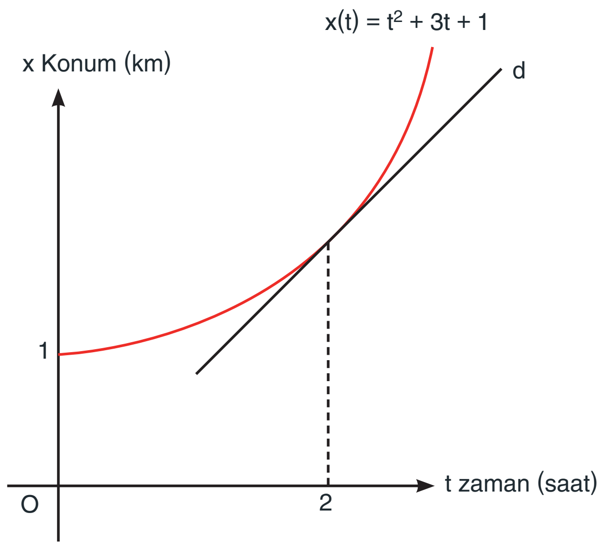
$f(x) = x^2 - 3$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, f fonksiyonunun x = 4'teki anlık değişim oranı kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

9.



Şekilde düzgün doğrusal olarak hareket eden bir hareketliye ait konum-zaman grafiği ve t = 2 noktasından çizilen teğet verilmiştir.

$x(t) = t^2 + 3t + 1$ (metre)

olduğuna göre, t = 2 anındaki değişim hızı kaç m/sn'dir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

10. Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu;

$f(x) = x^3 + 7$

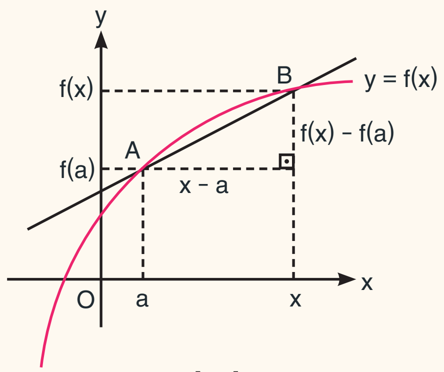
biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, [−2, 1] aralığındaki değişim oranı kaçtır?

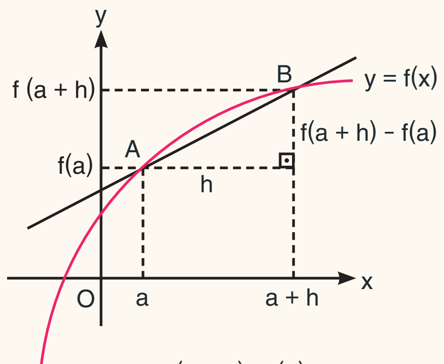
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 7

Cevap Anahtarı			
1.E	2.B	3.E	4.B
5.C	6.C	7.C	8.D
9.B	10.C		

Önceki ünitede anlatılan değişim oranına farklı bir bakış açısı aşağıda verilmiştir.



Fonksiyonunun [a,x] aralığındaki değişim oranı $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$'dır. x = a + h alındığında ise



değişim oranı $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ şeklinde hesaplanır.

- h, küçük seçilerek sıfıra yaklaştırıldığında B noktası A noktasına yaklaşır.
- $h \to 0$ için limit durumunda B noktası A noktası ile çakışır ve AB doğrusu A noktasında y = f(x) eğrisine teğet olur.

▶ **Tanım:**

$f : A \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu $a \in A$'da sürekli olmak üzere,

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ limiti bir gerçel sayıya eşit ise, bu limit değerine f fonksiyonunun x = a noktasındaki türevi denir.

$f'(a)$, $\dfrac{df}{dx}\Big|_{x=a}$ ile gösterilir.

Buna göre,

$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$'dır. Bu ifadeye türevin limit tanımı denir. Diğer bir ifade ile,

$x - a = h$ alınırsa $x \to a$ için $h \to 0$ olur. Bu durumda tanım

$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ şeklinde ifade edilir.

ÖRNEK - 1

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki türevi kaçtır?

ÇÖZÜM

1. Yol:

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)\cdot(x+3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} (x+3) = 6 \quad \text{olur.}$$

2. Yol

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{9+6h+h^2-9}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (6+h) = 6 \quad \text{olur.}$$

Cevap: 6

ÖRNEK - 2

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve x = 5 noktasında türevlenebilir f fonksiyonu için

$$\lim_{x \to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x^2-25}$$

limitinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

Limit özelliklerini hatırlayalım.

$$\left(\lim_{x \to a} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)\right)$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x^2-25} = \lim_{x \to 5} \frac{f(x)-f(5)}{(x-5)(x+5)}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} \cdot \lim_{x \to 5} \frac{1}{x+5}$$

$$= f'(5)\cdot\frac{1}{10} = \frac{f'(5)}{10} \quad \text{olur.}$$

Cevap: $\dfrac{f'(5)}{10}$

ÖRNEK - 3

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı türevlenebilen f fonksiyonu için

$f'(1) = 6$

olduğuna göre

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h^2 + 3h}$$

limitinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

Türevin tanımına göre

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) \text{ 'dir.}$$

Buna göre,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{h+3}$$

$$f'(1) \cdot \frac{1}{3} = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2 \quad \text{olur.}$$

Cevap: 2

ÖRNEK - 4

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı türevlenebilir f fonksiyonu için

$f'(4) = 6$

olduğuna göre, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2h+4) - f(4)}{3h}$ **limitinin değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

Türevin tanımından hareketle

$k = 2h$ olsun.

$h \to 0$ ise $k \to 0$

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(4+k) - f(4)}{\frac{3k}{2}}$$

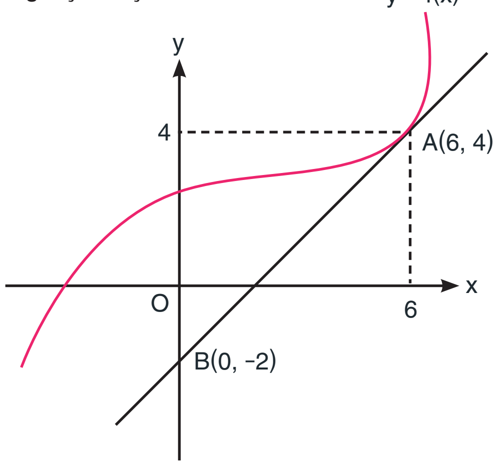
$$= \frac{2}{3} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{f(4+k) - f(4)}{k}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot f'(4) = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4 \quad \text{olur.}$$

Cevap: 4

ÖRNEK - 5

Aşağıda gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonunun grafiğine, üzerindeki x = 6 apsisli noktadan teğet çizilmiştir.



Buna göre,

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h}{f(6) - f(6+h)}$ **limitinin değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun herhangi bir noktasından çizilen teğetin eğimi, o noktadaki türev değerine eşittir.

A(6, 4) ve B(0, -2) noktalarından AB doğrusunun eğimini bulalım.

$$\text{Eğim}_{AB} = \frac{-2-4}{0-6} = 1 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda $f'(6) = 1$'dir.

$$\lim_{h \to 0} \frac{3h}{f(6) - f(6+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{3}{\frac{f(6) - f(6+h)}{h}}$$

$$\frac{-3}{\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h}} = \frac{-3}{f'(6)} = -3 \quad \text{olur.}$$

Cevap: -3

ÖSYM TARZI

ÖRNEK - 6

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu için $f'(1) = 5$'tir.

Buna göre,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+3h) - f(1-5h)}{2h}$$

limitinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

f(1) ekleyip çıkaralım.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{2h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(1) - f(1-5h)}{2h}$$

$3h = m$ ve $-5h = n$ olsun.

$h \to 0$ için $m \to 0$ ve $n \to 0$ 'dır.

$$\frac{1}{2} \cdot \lim_{m\to 0} \frac{f(1+m) - f(1)}{\frac{m}{3}} - \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to 0} \frac{f(1+n) - f(1)}{\frac{-n}{5}}$$

$$\frac{3}{2} \cdot f'(1) + \frac{5}{2} \cdot f'(1) = 4 \cdot f'(1)$$

$f'(1) = 5$ olduğu için

$4 \cdot f'(1) = 4 \cdot 5 = 20$ olur.

Cevap: 20

ÖRNEK - 7

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{x^2}\right)$$

fonksiyonu için f'(1) kaçtır?

ÇÖZÜM

f(x) fonksiyonunu

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2} \cdot \frac{x^3-1}{x^2}$$

$f(x) = \dfrac{x^6-1}{x^4}$ şeklinde düzenleyelim.

Türev tanımından:

$$f'(1) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x^6-1}{x^4}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^6-1}{x^4 \cdot (x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1) \cdot (x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}{x^4 \cdot (x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4} = 6 \quad \text{olur.}$$

Cevap: 6

ÖRNEK - 8

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı türevlenebilen f fonksiyonunda

$$f'(1) = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre, $\lim_{x\to 1} \dfrac{4x-4}{f(1)-f(x)}$ **limitinin değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to 1} \frac{4x-4}{f(1)-f(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{4(x-1)}{-1(f(x)-f(1))}$$

Şeklinde düzenleyip türev tanımı uygulayalım.

$$-4 \cdot \lim_{x\to 1} \frac{1}{\frac{f(1)-f(x)}{x-1}} = \frac{-4}{f'(1)}$$

$f'(1) = \dfrac{1}{2}$ ise

$$\lim_{x\to 1} \frac{4x-4}{f(1)-f(x)} = \frac{-4}{\frac{1}{2}} = -8 \text{ olur.}$$

Cevap: -8

ÖRNEK - 9

n pozitif tam sayı olmak üzere gerçel sayılar kümesi üzerindeki tanımlı ve türevlenebilir f fonksiyonu $f(x) = x^n$ **olduğuna göre f'(1) kaçtır?**

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$$

$x^n - 1 = (x-1) \cdot (x^{n-1}+x^{n-2}+ \ldots +x+1)$ olduğunu hatırlayalım.

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1) \cdot (x^{n-1}+x^{n-2}+ \ldots +x+1)}{x-1}$$

$$= \underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n \text{ tane}} = n \quad \text{olur.}$$

Cevap: n

ORİJİNAL MATEMATİK

SORU - 1

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(5+h)-f(5)}{3h}$ **işleminin sonucu kaçtır?**

SORU - 2

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h^2+2h}$ **işleminin sonucu kaçtır?**

SORU - 3

$f(x) = 2x^2 + 3x$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

limitinin sonucu kaçtır?

SORU - 4

f gerçel sayılarda tanımlı türevlenebilir fonksiyon olduğuna göre,

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f^2(x)-f^2(1)}{x-1}$ **işleminin sonucu kaçtır?**

SORU - 5

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu

$f(x) = 3x + 2$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ **limitinin değeri kaçtır?**

SORU - 6

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu

$f(x) = 2x - 7$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{2x-6}$ **limitinin değeri kaçtır?**

ORİJİNAL MATEMATİK

Cevap Anahtarı		
1. $\dfrac{f'(5)}{3}$	2. $\dfrac{f'(1)}{2}$	3. $4x + 3$
4. $2f(1) \cdot f'(1)$	5. 3	6. 1

1. $x = 1$ **noktasında türevli** $y = f(x)$ **fonksiyonu için**

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^3 - 1}$$

limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{f'(1)}{2}$ B) $2 \cdot f'(1)$ C) $\frac{f'(1)}{3}$ D) $3 \cdot f'(1)$ E) $f'(1)$

2. $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x - h)}{4h}$$

limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-f'(x)$ B) $2 \cdot f'(x)$ C) $f'(x)$ D) $\frac{2}{3} \cdot f'(x)$ E) $\frac{f'(x)}{2}$

3. Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu

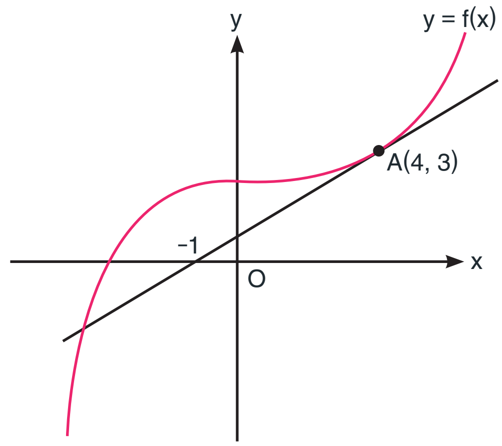
$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 1$$

olduğuna göre

$\lim_{h \to 0} \frac{f(2) - f(2 + h)}{2h}$ **limitinin değeri kaçtır?**

A) −6 B) −5 C) −4 D) 4 E) 8

4.



Şekilde f fonksiyonunu, üzerindeki A(4, 3) noktasından çizilen teğet x ekseni (−1, 0) noktasında kesmektedir.

Buna göre, $\frac{f(4)}{f'(4)}$ **oranı kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

5. Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve her noktada türevli f fonksiyonu için $f'(1) = \frac{2}{3}$ **olduğuna göre,**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + 3h) - f(1)}{h}$$

limitinin değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6. **Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve türevlenebilir bir f fonksiyonu için**

$f(x + y) = f(x) + f(y) + 3xy$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 5$$

olduğuna göre f'(2) kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

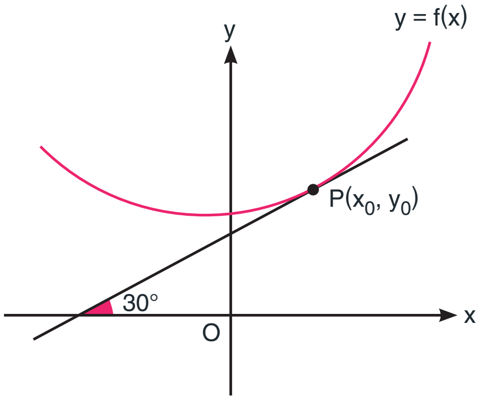
7. $f(x) = x^2 + 1$ **fonksiyonu için**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(3 + 2h) - f(3 - h)}{h}$$

limitinin sonucu kaçtır?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

8.



Şekilde f fonksiyonu üzerindeki $P(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğet doğrusu x ekseni ile 30° 'lik açı oluşturmaktadır.

Buna göre,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + 6h) - f(x_0)}{h}$$

limitinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $2\sqrt{3}$ E) 6

9. Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve türevlenebilen

$f(x) = x^4 - mx^2 + 15$

fonksiyonu veriliyor.

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 8$$

olduğuna göre m değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

10. **Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve her noktada türevli f fonksiyonu için**

$f(-1) = \frac{3}{2}$ ve $f'(-1) = 12$

olduğuna göre

$$\lim_{x \to -1} \frac{f^2(x) - f^2(-1)}{x + 1}$$

limitinin değeri kaçtır?

A) 20 B) 24 C) 28 D) 30 E) 36

11. Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı türevlenebilen f fonksiyonu için

$f'(0) = \frac{5}{2}$

olduğuna göre

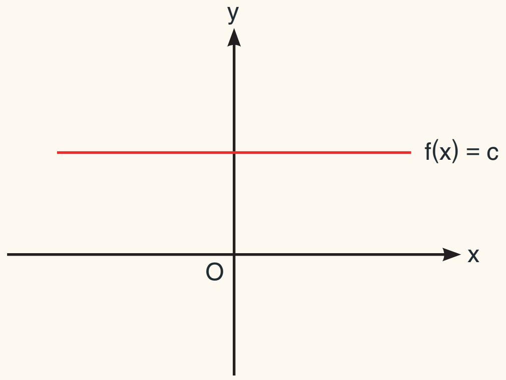
$$\lim_{h \to 2} \frac{f(3h - 6) - f(2 - h)}{h - 2}$$

limitinin değeri kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Cevap Anahtarı					
1.C	2.E	3.C	4.D	5.B	6.D
7.D	8.D	9.D	10.E	11.D	

c gerçel sayı, $f(x) = c$ ise $f'(x) = 0$'dır.



$f(x) = c$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x ekseni-ne paralel olduğu görülür. Dolayısıyla eğimi 0'dır.

$m = \dfrac{df(x)}{dx} = 0$ olur.

ÖRNEK - 1

$f(x) = 2043^2$ olduğuna göre $f'(x)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

f sabit fonksiyon olduğundan her noktadaki türevi 0'a eşittir.

$f'(x) = 0$'dır.

Cevap: 0

ÖRNEK - 2

a ve b gerçel sayı olmak üzere,

$f(x) = a^2 + b^2 + a \cdot b + 1$ **fonksiyonu için** $f'(0) + f'(1)$ **işleminin sonucu kaçtır?**

ÇÖZÜM

f, x değişkenine bağlı bir fonksiyon olduğundan dolayı $f(x) = a^2 + b^2 + a \cdot b + 1$ fonksiyonu sabit fonksiyondur.

Sabit fonksiyonun her noktadaki türevi 0'dır.

$f'(0) = 0$ ve $f'(1) = 0$, $0 + 0 = 0$'dır.

Cevap: 0

$f(x) = x^n$ ise $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$c \in R$ olmak üzere $\big(c \cdot f(x)\big)' = c \cdot f'(x)$

ÖRNEK - 3

$f(x) = x^7$ **olduğuna göre** $f'(x)$ **türev fonksiyonunu bulunuz.**

ÇÖZÜM

$f(x) = x^7$ ise $f'(x) = 7 \cdot x^{7-1}$

$= 7 \cdot x^6$ olarak bulunur.

Cevap: $7x^6$

ÖRNEK - 4

$f(x) = 7 \cdot x^5$ **olduğuna göre** $f'(x)$ **türev fonksiyonunu bulunuz.**

ÇÖZÜM

$f(x) = 7x^5$ ise $f'(x) = 7 \cdot 5 \cdot x^{5-1}$

$= 35 \cdot x^4$ olarak bulunur.

Cevap: $35x^4$

ÖRNEK - 5

$f(x) = 5 \cdot x$ **olduğuna göre** $f'(x)$ **türev fonksiyonunu bulunuz.**

ÇÖZÜM

$f(x) = 5 \cdot x$ ise $f'(x) = 5 \cdot 1$

$= 5$ olarak bulunur.

Cevap: 5

ÖRNEK - 6

$f(x) = 4 \cdot x^2$ **olduğuna göre,** $f'(3)$ **değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$f(x) = 4 \cdot x^2$ ise $f'(x) = 4 \cdot 2 \cdot x^{2-1}$

$f'(3) = 8 \cdot 3 = 24$ olarak bulunur.

Cevap: 24

ÖRNEK - 7

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ **olduğuna göre,** $f'(1)$ **değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$f(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$ buradan $f(x) = x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}$ olur.

$f'(x) = \dfrac{1}{6} x^{\frac{-5}{6}}$ $\quad f'(1) = \dfrac{1}{6}$ bulunur.

Cevap: $\dfrac{1}{6}$

ÖRNEK - 8

$f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x}$ **olmak üzere** $f'(8)$ **değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x}$ ise $f(x) = x \cdot x^{\frac{1}{3}}$

$f(x) = x^{1+\frac{1}{3}}$ buradan $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ olarak yazılabilir.

Şimdi türev alma işlemine geçelim:

$f'(x) = \dfrac{4}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}-1}$, $\quad f'(x) = \dfrac{4}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}}$ 'tür.

$f'(8) = \dfrac{4}{3} \cdot (2^3)^{\frac{1}{3}}$

$f'(8) = \dfrac{8}{3}$ bulunur.

Cevap: $\dfrac{8}{3}$

ÖRNEK - 9

$f(x) = x^{-2}$ **olduğuna göre** $f'(k) = -16$ **ise k değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$f(x) = x^{-2}$ ise $f'(x) = -2 \cdot x^{-2-1}$

$f'(x) = -2 \cdot x^{-3}$, $f'(k) = -2 \cdot \dfrac{1}{k^3} = -16$

$k^3 = \dfrac{1}{8}$ $\quad k = \dfrac{1}{2}$ bulunur.

Cevap: $\dfrac{1}{2}$

ÖRNEK - 10

a pozitif tam sayı olmak üzere,

$f(x) = x^a$ ve $g(x) = x^{2a}$ **fonksiyonları için**

$\dfrac{f'(1)}{g'(-1)}$ **değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$ ve $g'(x) = 2a \cdot x^{2a-1}$ olur.

$f'(1) = a$ ve $g'(-1) = -2a$ bulunur.

$\dfrac{f'(1)}{g'(-1)} = \dfrac{-1}{2}$ bulunur.

Cevap: $\dfrac{-1}{2}$

ÖRNEK - 11

n pozitif tam sayı ve $f(x) = n \cdot x^n$ **fonksiyonu için**

$f'(1) \cdot f'(2) = 32$ **olduğuna göre, n değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$f(x) = n \cdot x^n$ ise $f'(x) = n^2 \cdot x^{n-1}$ olarak bulunur.

Buna göre,

$f'(1) = n^2 \cdot 1 = n^2$, $\quad f'(2) = n^2 \cdot 2^{n-1}$

$f'(1) \cdot f'(2) = n^4 \cdot 2^{n-1} = 32$

olduğundan $n = 2$ olarak bulunur.

Cevap: 2

ÖRNEK - 12

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu

$f(x) = \dfrac{x^n}{n+1}$ biçiminde tanımlanıyor.

n pozitif tam sayı olmak üzere,

$\sum\limits_{k=1}^{2} f'(k) = \dfrac{3n}{n+1}$ **olduğuna göre n değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun türevini bulalım.

$f'(x) = \dfrac{n}{n+1} \cdot x^{n-1}$, $f'(1) = \dfrac{n}{n+1}$ ve $f'(2) = \dfrac{n}{n+1} \cdot 2^{n-1}$ 'dir.

$\sum\limits_{k=1}^{2} f'(k) = f'(1) + f'(2)$

$\Rightarrow \dfrac{n}{n+1} + \dfrac{n}{n+1} \cdot 2^{n-1} = \dfrac{3n}{n+1}$

$1 + 2^{n-1} = 3$

$2^{n-1} = 2$ $\quad n = 2 \quad$ olarak bulunur.

Cevap: 2

ÖRNEK - 13

n pozitif tam sayı olmak üzere

$f_n(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{n+1}$ biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, $\sum\limits_{n=1}^{100} f_n'(1)$ **toplamının değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$f_n'(x) = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{n+1} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$

$f'_n(1) = \dfrac{1}{n \cdot (n+1)}$ olacaktır.

$\sum\limits_{n=1}^{100} \left(\dfrac{1}{n \cdot (n+1)}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ olduğundan yukarıdaki ifadeyi tekrar düzenleyelim.

$\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{100} - \dfrac{1}{101} = 1 - \dfrac{1}{101}$

$= \dfrac{100}{101}$ olarak bulunur.

Cevap: $\dfrac{100}{101}$

ÖRNEK - 14

n, 1'den büyük bir tam sayı olmak üzere

gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu

$f(x) = \sqrt[n]{x}$ biçiminde tanımlanıyor.

$f'(1) = \dfrac{5-n}{6}$

olduğuna göre n değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

f fonksiyonu gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı olduğuna göre n değeri tek sayı olmalıdır.

f fonksiyonunu düzenleyelim:

$f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ ifadesinin türevi alındığında,

$f'(x) = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$ buradan

$f'(1) = \dfrac{1}{n}$ bulunur.

$\dfrac{1}{n} = \dfrac{5-n}{6} \Rightarrow 5n - n^2 = 6 \Rightarrow n^2 - 5n + 6 = 0$

denklemini çözersek n = 2 veya n = 3 bulunur.

n tek sayı olduğuna göre n = 3 olur.

Cevap: 3

ORİJİNAL MATEMATİK